NODVS XXXIII
Març de 2011

Un apunte sobre la referencia de Lacan al Teorema de Stokes en "Posición del inconsciente"

Trabajo elaborado en el contexto del Seminario de Investigación ''Posición del inconsciente: entre alienación y separación'', impartido por Antoni Vicens en el curso 2009-10.

Isabel Prieto

Resum

Este artículo permite elucidar las razones que motivan la cita de Lacan al teorema de Stokes en el texto de los Escritos titulado "Posición del inconsciente": en relación a la pulsión. para ello, se expone con claridad el teorema, en concreto a partir de las nociones de constancia de flujo, fuido incompresible y régimen estacionario, fuente de rotacional y campo vectorial.

Paraules clau

Teorema de Stokes; análisis vectorial; flujo; constancia; pulsión

El Teorema de Stokes, a situar en el ámbito matemático del Análisis Vectorial, es de uso obligado en la Teoría Electromagnética de Maxwell y en su enunciado: '*La circulación de un campo vectorial a través de un contorno cerrado es igual al flujo del rotacional del campo vectorial a través de cualquier superficie abierta que se apoye en dicho contorno*', aparecen conceptos (flujo, rotacional…) que surgen por vez primera en Física en el estudio de fluidos.

La alusión que hace Lacan al Teorema de Stokes en 'Posición del inconsciente'[1]: '*La referencia a la teoría electromagnética y concretamente a un teorema llamado de Stokes nos permitiría situar, bajo la condición de que esa superficie se apoye en un borde cerrado, que es la zona erógena, la razón de la constancia del empuje de la pulsión sobre la que Freud insiste tanto*', parece ir dirigida, no tanto al teorema en sí, como al hecho, implícito en el Teorema, de que el flujo sea constante para '…*cualquier superficie abierta que se apoye en dicho contorno*'.

En un contexto de estudio de fluidos (sean estos líquidos o gaseosos) es fácil ver, bajo ciertas condiciones, la razón de la constancia de este flujo y es el primer punto que abordamos. En segundo lugar se trata de mostrar por qué lo que es válido en el caso de los fluidos (la

Dipòsit legal B-24256-2010. ISSN 2013-8539

constancia del flujo) es válido también en el Teorema de Stokes para un campo vectorial que no es cualquiera sino 'el rotacional de un campo vectorial'. Para tratar ambos puntos introducimos cuando se precisan algunas definiciones y conceptos.

1.- Flujo de fluidos

Fuentes de divergencia

Sabemos qué es un manantial (de donde brota un fluido, sea éste líquido o gas) y qué es un sumidero (por donde ese fluido desaparece, es tragado).

Nos van a interesar manantiales y sumideros 'puntuales', del tamaño de un punto.

Así, en las proximidades de un punto manantial, los vectores que indican la velocidad de las partículas del fluido divergen de dicho punto, mientras que en las proximidades de un punto sumidero los vectores velocidad darían una gráfica convergente hacia dicho punto.

A este tipo de fuentes puntuales, manantial o sumidero, las llamamos fuentes de divergencia (una convergencia no es otra cosa que una divergencia negativa); podemos imaginarlas en 2 o en 3 dimensiones.

(Podemos pensar que el fluido en cuestión es agua, si eso nos facilita las cosas).

Concepto de flujo

Si habláramos del tráfico, el flujo de coches a través de una determinada línea de control sería el nº de coches por unidad de tiempo que la atraviesan.

Cómo hablamos de un fluido, el flujo será la 'cantidad' de fluido por unidad de tiempo que atraviesa: una determinada línea de control (si se trata de una lámina de fluido que avanza por una cinta o 'carretera'), o bien, una determinada superficie de control (si estamos en 3 dimensiones).

Situación que vamos a considerar

Vamos a empezar por tratar con fluidos incompresibles y en régimen estacionario. Un *fluido incompresible* es aquel que no se va a comprimir ni a expandir. Si seguimos en su trayectoria a un pequeño volumen de este fluido, su densidad (i.e.: el cociente entre la masa y el volumen) permanece constante. Un *régimen estacionario* es aquel en que el tiempo está excluido: lo que ocurre en un punto 'siempre ocurre', no depende del momento.

Supongamos que tenemos una región ocupada por un fluido de estas características (incompresible y en régimen 'estacionario') y consideremos en esta región, una porción de volumen que no contenga fuentes de divergencia (ni manantiales ni sumideros). Nos planteamos la pregunta: ¿cuál es el flujo neto de fluido a través de la superficie que encierra este volumen? Como no contiene fuentes de divergencia, la misma cantidad de fluido que entra por unidad de tiempo, tiene que salir en la misma unidad de tiempo. (Si saliera más del que

Dipòsit legal B-24256-2010. ISSN 2013-8539

entra habría un manantial, si entrara más del que sale habría un sumidero). Por lo tanto el flujo neto es cero: el mismo que entra, sale, en cada unidad de tiempo. Es decir, si cortamos el volumen en dos mediante un corte arbitrario, la superficie *S* que lo encerraba queda también dividida en dos superficies, S_1 y S_2 que se apoyan en el mismo contorno cerrado, el provocado por el corte; y el flujo que entra por S_1 tiene que salir por S_2. A estas superficies que como S_1 y S_2 no delimitan un volumen las denominamos 'superficies abiertas'.

Podemos ahorrarnos el tener que hablar de 'flujos que entran' o 'flujos que salen' con el convenio siguiente: se orienta el contorno (es decir se considera un sentido de recorrido del mismo, el que sea); y se toma como sentido positivo para los flujos el que coincide con el de avance de un tornillo 'a derechas' (los tornillos 'normales') cuando se le hace girar en el sentido elegido para recorrer el contorno.

Con este criterio el flujo a través de S_1 es el mismo que a través de S_2. Abreviadamente $?_?=?_2$. (La letra usual para referirse al flujo en Física es ?).

Pero el razonamiento previo es correcto para cualquier volumen que no contiene fuentes de divergencia. Así que para el mismo contorno cerrado podemos considerar todas las superficies abiertas 'tipo casquete' que se apoyan en él; dos superficies cualesquiera de éstas, unidas, determinan un volumen cerrado sin fuentes de divergencia, y por tanto:

$?_?= ?_2 = \ldots = ?_n$

Es decir, el flujo a través de cada una de las infinitas superficies abiertas que se apoyan en un mismo contorno cerrado en un volumen sin fuentes de divergencia, es el mismo, es una constante.

Por otra parte, el volumen parcial, sin fuentes de divergencia, del que partíamos, es el que queramos considerar, y el corte que en él provocamos es también arbitrario; por tanto, en un volumen sin fuentes de divergencia, tenemos tantos contornos cerrados como queramos, y para cada uno de ellos, un único flujo (que podemos calcular utilizando una cualquiera de las infinitas superficies abiertas que se apoyan en dicho contorno cerrado).

Las condiciones previas de incompresibilidad y régimen estacionario impuestas al fluido simplificaron el escenario del razonamiento y nos lo hacen más intuitivo pero no son necesarias: un punto de expansión o compresión en un fluido compresible actuaría como un manantial o sumidero por lo que quedaría excluido de nuestra porción de volumen en estudio (que recordémoslo es un volumen sin fuentes de divergencia). Asimismo la condición de régimen estacionario se puede obviar dado que cualquier cambio temporal se traduciría bien en fuentes de divergencia (y habría que excluirlo de nuestro estudio), o bien el volumen seguiría siendo un volumen sin fuentes de divergencia y el razonamiento para la constancia del flujo seguiría siendo válido.

En resumen pues, en un volumen de fluido sin fuentes de divergencia, el flujo a través de 'cualquier superficie abierta que se apoye en un mismo contorno cerrado' es constante.

Fuentes de rotacional

Hemos considerado el caso en que las velocidades del fluido son divergentes o convergentes respecto a un punto al que denominamos manantial o sumidero y en general punto fuente de divergencia.

Dipòsit legal B-24256-2010. ISSN 2013-8539

Falta considerar el caso, bien distinto, en que las velocidades del fluido en las proximidades de un punto tuvieran el sentido de las tangentes a una pequeñísima circunferencia centrada en dicho punto. Una ligera y pequeñísima rueda rígida provista de paletas, situada en ese punto del fluido y con su eje coincidente con el de la circunferencia, giraría sobre su eje[2]. Para caracterizar este segundo caso se introducen las fuentes de rotacional. Allí donde la rueda gira decimos que hay fuente de rotacional, hay remolino; la intensidad del giro marcará el valor de la fuente de rotacional, y el eje y sentido de giro señala la dirección y sentido de esta fuente de rotacional; a diferencia de lo que ocurría con las fuentes de divergencia que tienen carácter escalar, las fuentes de rotacional tienen carácter vectorial.

En la práctica los dos tipos de fuentes, las de divergencia y las de rotacional, dan cuenta de todos los casos posibles para las velocidades en un fluido.

2.- Flujo de un campo vectorial

Cuando una magnitud vectorial (como por ejemplo una fuerza o una velocidad) es conocida, no en un punto concreto del espacio, sino en todos los puntos de una determinada región espacial, hablamos de un campo vectorial. Del mismo modo que cuando conocemos una magnitud escalar (como la temperatura por ejemplo), no en un punto concreto del espacio, sino en todos los puntos de una determinada región espacial, hablamos de un campo escalar.

Por flujo de un campo vectorial podemos entender el equivalente al flujo de un fluido si nuestro campo vectorial lo hacemos coincidir con el campo de velocidades en el volumen de fluido.

Al igual que en el caso de los fluidos, se habla de las fuentes de divergencia (manantiales y sumideros) y de las fuentes de rotacional de un campo vectorial, y se definen ambas matemáticamente.

Se define así el operador divergencia, que aplicado a un campo vectorial genera un campo escalar. Si la divergencia de un campo vectorial en un determinado punto tienen un valor positivo nos indica que en ese punto hay 'un manantial', los vectores divergen de dicho punto; si el valor es negativo nos señala la presencia de 'un sumidero', los vectores convergen hacia dicho punto; si su valor es nulo nos indica la ausencia de fuentes de divergencia en dicho punto. La cuantía del valor de la divergencia del campo vectorial indica la intensidad de la fuente.

De un modo parecido se define el operador rotacional, que aplicado a un campo vectorial genera un segundo campo vectorial. El valor del rotacional del campo vectorial en un punto nos indica la intensidad de giro de la rueda con paletas situada en dicho punto si el campo de vectores correspondiera al campo de velocidades en un fluido, y la dirección y sentido del vector rotacional corresponden al eje y sentido de giro de la rueda con paletas.

Al igual que en los fluidos, las únicas fuentes de un campo vectorial son las de divergencia y las de rotacional.

Lo que aquí interesa destacar es una propiedad importante del campo vectorial 'rotacional de un campo vectorial': no tiene fuentes de divergencia.

Cualquier volumen que consideremos en este nuevo campo vectorial que denominamos 'rotacional de un campo vectorial', es un volumen libre de fuentes de divergencia; por tanto el razonamiento hecho para el caso de los fluidos también es válido aquí y el flujo del rotacional

Dipòsit legal B-24256-2010. ISSN 2013-8539

de un campo vectorial a través de cualquier superficie abierta que se apoye en un contorno cerrado será una constante.

La constancia del flujo implícita en el teorema de Stokes queda así explicada por el hecho de que el rotacional de un campo vectorial es a su vez un campo vectorial con la interesante propiedad de tener divergencia nula.

El enunciado del Teorema de Stokes establece la igualdad entre este flujo constante y el resultado de una operación definida sobre el borde único en que se apoyan todas las superficies abiertas (operación matemática que se denomina '…*circulación de un campo vectorial a través de un contorno cerrado…'*).

Notes

1. Lacan, J.; ''Posición del inconsciente'', Escritos 2, Siglo XXI Editores, 17ª edición, 1993, p. 826.
2. Marsden, J.E., & Tromba, J. A.; Cálculo Vectorial, Addison Wesley, 5ª edición, 2004, p. 293.